KONSEP & DISTRIBUSI PROBABILITAS

4 Pengendalian Kualitas

Debrina Puspita Andriani
Teknik Industri
Universitas Brawijaya
e-Mail : debrina@ub.ac.id
Blog : http://debrina.lecture.ub.ac.id/

- *Statistik & Statistika*
- *Populasi vs. Sampel*
- *Eksperimen, Ruang Sampel, Events*
- *Konsep Probabilitas*
- *Permutasi & Kombinasi*
- *Distribusi Probabilitas*

Outline

Kualitas

Definisi Statistik & Statistika

Statistik

- metodologi yang digunakan untuk mengumpulkan, mengorganisir, menganalisis, menginterpretasikan dan mempresentasikan data

Statistika

- Ilmu mengumpulkan, mengolah, meringkas, menyajikan, menginterpretasikan, dan menganalisis data guna mendukung pengambilan keputusan

Fungsi Statistik

Bank Data

- Menyediakan data untuk diolah dan diinterpretasikan agar dapat dipakai untuk menerangkan keadaan yang perlu diketahui

Alat *Quality Control*

- Sebagai alat standardisasi dan alat pengawasan

Alat Analisis

- Sebagai metode penganalisisan data

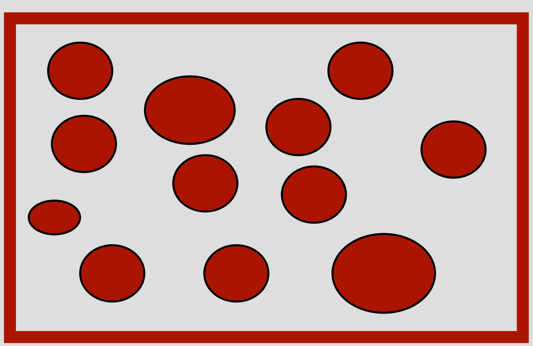
Pemecahan Masalah & Pembuatan Keputusan

- Sebagai dasar penetapan kebijakan & langkah lebih lanjut untuk mempertahankan, mengembangkan perusahaan dalam memperoleh keutungan

Populasi vs. Sampel

POPULASI

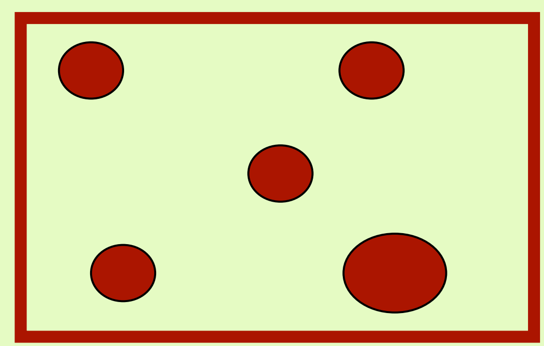
Sebuah kumpulan dari semua kemungkinan orang-orang, benda-benda dan ukuran lain dari objek yang menjadi perhatian.



Mahasiswa teknik industri UB

SAMPEL

Suatu bagian dari populasi tertentu yang menjadi perhatian.



Masing-masing10 orang mahasiswa
TI UB angkatan 2010,2011,2012, 2013

EKSPERIMEN

suatu percobaan yang dapat diulang-ulang dengan kondisi yang sama

CONTOH :

- Eksperimen : proses produksi di suatu mesin

  Hasilnya : produk cacat atau baik

- Eksperimen : melempar dadu 1 kali

  Hasilnya : tampak angka 1 atau 2 atau 3 atau 4 atau 5 atau 6

RUANG SAMPEL (S)

Himpunan semua hasil (*outcome*) yang mungkin dalam suatu eksperimen

CONTOH :

- Ruang sampel proses produksi di suatu mesin

  S = { produk cacat, produk baik } n(S) = 2

- Ruang sampel pelemparan dadu 1 kali

  S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} n(S) = 6

PERISTIWA (*EVENT*)

Himpunan bagian dari ruang sampel

CONTOH :

- Eksperimen : melempar dadu 1 kali

  Peristiwa A : Hasil pelemparan dadu berupa angka genap = { 2, 4, 6} n(A) = 3

- Eksperimen : pelemparan sebuah mata uang 2 kali

  Hasil : sisi yang tampak atas (M=muka, B=belakang)

  Ruang sampel S = { MM, MB, BM, BB } n (S) = 4

  Peristiwa :

  A = paling sedikit ada satu M = { MM, MB, BM} n(A)=3

  B = kedua hasil lemparan sama = { MM, BB } n(B)=2

PROBABILITAS

- suatu ukuran yang menjelaskan tentang seberapa sering peristiwa itu akan terjadi. Semakin besar nilai probabilitas menyatakan bahwa peristiwa itu akan sering terjadi

- Bila A adalah suatu peristiwa maka probabilitas terjadinya peristiwa A didefinisikan :

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{banyaknya\ peristiwa\ A\ yg\ terjadi}{banyaknya\ ruang\ sampel}}$$

SIFAT PROBABILITAS

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ → karena $0 \leq n(A) \leq n(S)$

   peristiwa yang terjadi tidak mungkin lebih besar dari $n(S)$

   kemungkinan mulai $n(A)=0$ sampai

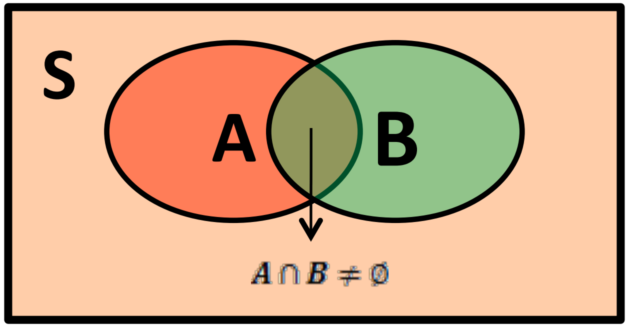
   $n(A) = n(S)$

2. P (A) = 0 (tidak mungkin terjadi)

   P (A) = 1 (pasti terjadi)

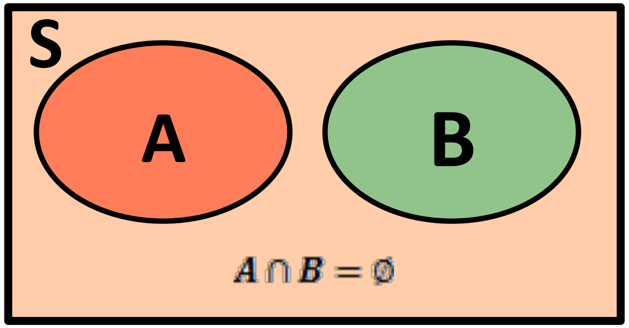
SIFAT PROBABILITAS

3. Bila peristiwa A dan B saling berserikat



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4. Bila peristiwa A dan B saling asing / tidak berserikat



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

SIFAT PROBABILITAS

5. $P(A^c) = 1 - P(A)$

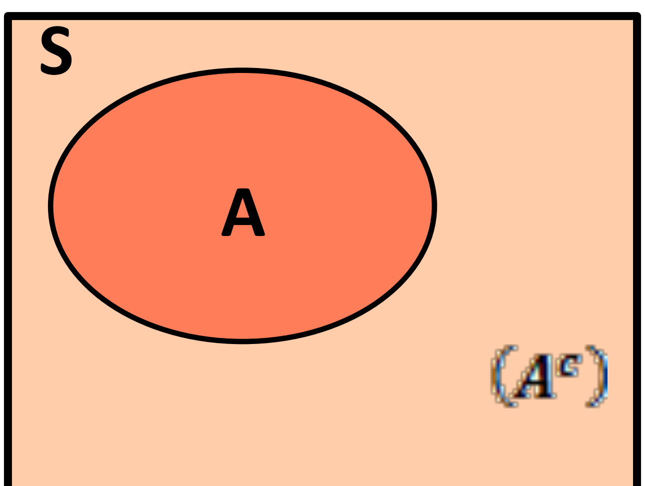
Non A

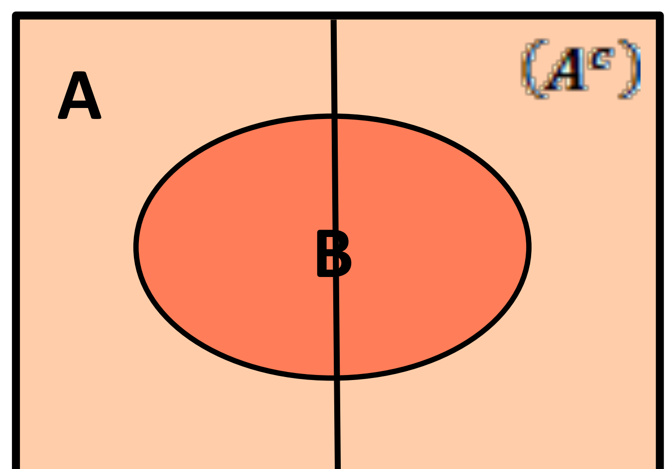
Karena Max = 1

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

6. $P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A^C)$

Probabilitas B di A dan probabilitas B di non A





CONTOH

Pelemparan sebuah dadu

1. A=titik genap yang tampak ={2, 4, 6}

   n(A)= 3 → $P(A) = \frac{3}{6}$

2. B= titik ganjil yang tampak ={1, 3, 5}

   n(B)= 3 → $P(B) = \frac{3}{6}$

3. A dan B saling asing → $P(A \cap B) = 0$
   sehingga

   $$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$$

Probabilitas Bersyarat ?

Permutasi

Penyusunan obyek dalam suatu urutan yang teratur/urutan tertentu.
AB ≠ BA

- Permutasi *r* unsur dari *n* unsur yang tersedia (ditulis **P_r^n** atau **$_nP_r$**)
- banyak cara *menyusun r* unsur yang berbeda diambil dari sekumpulan *n* unsur yang tersedia.
- Permutasi Sebagian

$$\boxed{{}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Kombinasi Menyeluruh

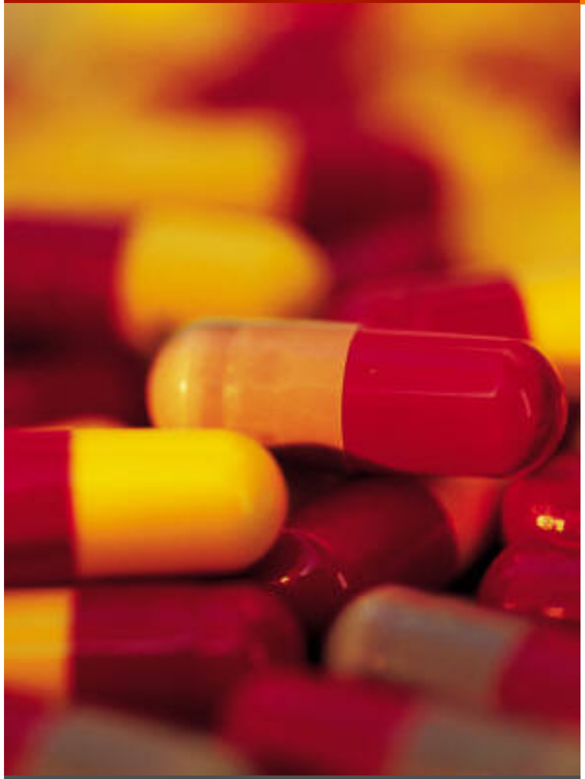
Kombinasi Sebagian

Kombinasi

Penyusunan obyek tanpa memperhatikan suatu urutan yang teratur/urutan tertentu.
AB = BA

- Kombinasi r unsur dari n unsur yang tersedia (ditulis C_r^n atau ${}_nC_r$) adalah banyak cara mengelompokan r unsur yang diambil dari sekumpulan n unsur yang tersedia.
- Kombinasi tidak menghiraukan urutan
- Kombinasi Sebagian

$$\boxed{nCr = \frac{n!}{(n-r)!r!}}$$



DISTRIBUSI PROBABILITAS

Adalah sebuah susunan distribusi yang mempermudah mengetahui probabilitas sebuah peristiwa / merupakan hasil dari setiap peluang peristiwa.

DISITRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

- Untuk **data atribut** → karakteristik yang diukur hanya membicarakan nilai-nilai tertentu (0,1,2,3)
- Misalnya: distribusi probabilitas binomial dan hipergeometrik

DISTRIBUSI PROBABILITAS KONTINU

- Untuk **data variabel** → karakteristik yang diukur adalah berbagai nilai (ketepatan pengukuran proses)
- distribusi probabilitas normal dan eksponensial

1. DISTRIBUSI BINOMIAL

- Suatu usaha bernoulli dapat menghasilkan:
  - *kesuksesan* dengan probabilitas **p**
  - *kegagalan* dengan probabilitas **q = 1 – p**
- maka distribusi probabilitas perubah acak binomial **X** yaitu banyaknya kesuksesan dalam **n**-usaha bebas adalah

$$\boxed{f(k) = P(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

Dimana: p = P sukses
q = P (gagal) = 1-p
k = 0, 1, 2, 3,...,n
n = banyaknya trial

- Dinamakan distribusi binomial dengan parameter:

$$\boxed{Mean \rightarrow \mu = np}$$

$$\boxed{Variance \rightarrow \sigma^2 = np\,(1-p)}$$

Contoh

Peluang cacat dan baik dari hasil produksi suatu perusahaan yang hampir bangkrut adalah 50%. Apabila perusahaan itu memproduksi 3 barang, berapakah probabilitas yang diperoleh, jika satu barang cacat?

Solusi :

- Dengan distribusi binomial x = 2 → 1 barang cacat, yang tidak cacat (x) = 2

$$b(2\,;3\,;0{,}5) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3}{8}$$

2. DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK

Misal dalam suatu populasi terdiri N dengan :

- a elemen dengan sifat tertentu (kejadian sukses)
- (N-a) elemen tidak mempunyai sifat tertentu (kejadian tidak sukses)
- Bila dari populasi diambil sampel random berukuran n dengan **tanpa pengembalian** maka :

$$\boxed{f(k) = P(x = k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

Dimana: X= 0,1,2,3,...,a bila a<n
X= 0,1,2,3,...,n bila a>n

- Dinamakan distribusi hipergeometrik dengan parameter:

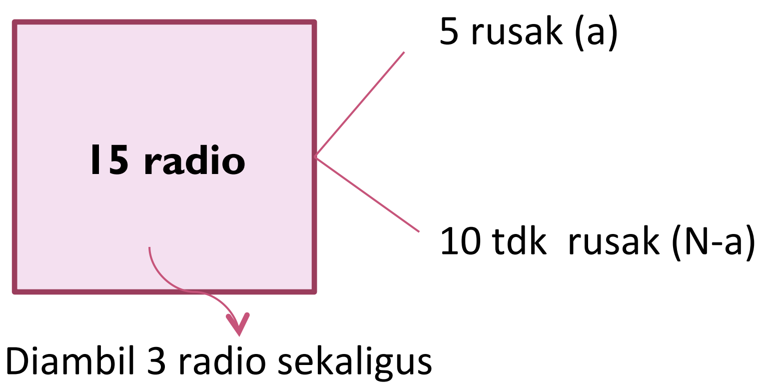
$$\boxed{Mean \rightarrow \mu = n\frac{a}{N}}$$

$$\boxed{Variance \rightarrow \sigma^2 = n\frac{a}{N}\frac{N-a}{N}\frac{N-n}{N-1}}$$

Contoh

Sebuah toko menjual obral 15 radio, bila diantara 15 radio tersebut sebetulnya terdapat 5 radio yang rusak dan seorang pembeli melakukan tes dengan cara mengambil sampel 3 buah radio yang dipilih secara random.

Tuliskan distribusi probabilitas untuk x bila x adalah banyaknya radio rusak dalam sampel!



Solusi :

N = 15

a = 5, N-a = 10

n = 3

X = { 0, 1, 2, 3}

$$P(x=0)=\frac{\binom{5}{0}\binom{15-5}{3-0}}{\binom{15}{3}}=\frac{\binom{5}{0}\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}}=\frac{1x120}{455}=0{,}264$$

$$P(x=1)=\frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}}=\frac{225}{455}=0{,}494$$

$$P(x=2)=\frac{\binom{5}{2}\binom{10}{1}}{\binom{15}{3}}=\frac{100}{455}=0{,}220$$

$$P(x=3)=\frac{\binom{5}{3}\binom{10}{0}}{\binom{15}{3}}=\frac{10}{455}=0{,}022$$

→ Distribusi probabilitas dari x

x	0	1	2	3
P(x)	0,264	0,494	0,220	0,022

3. DISTRIBUSI NORMAL

$P(x \leq \mu) = 0{,}5$

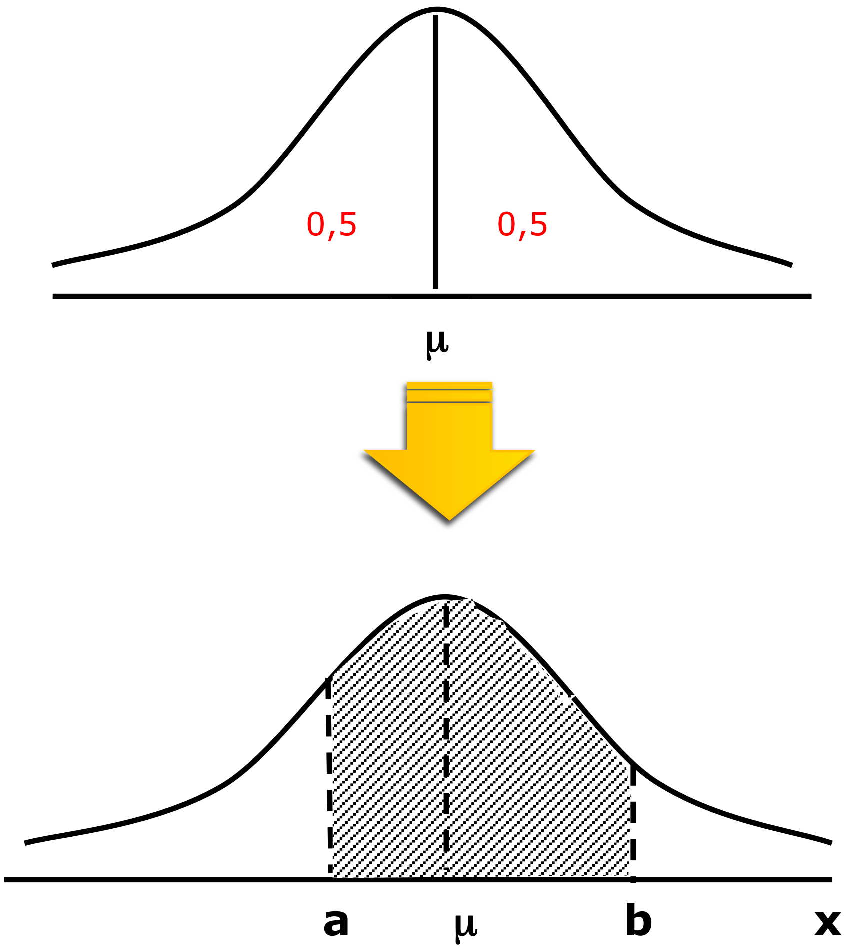
$P(x \geq \mu) = 0{,}5$

Luas kurva normal :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

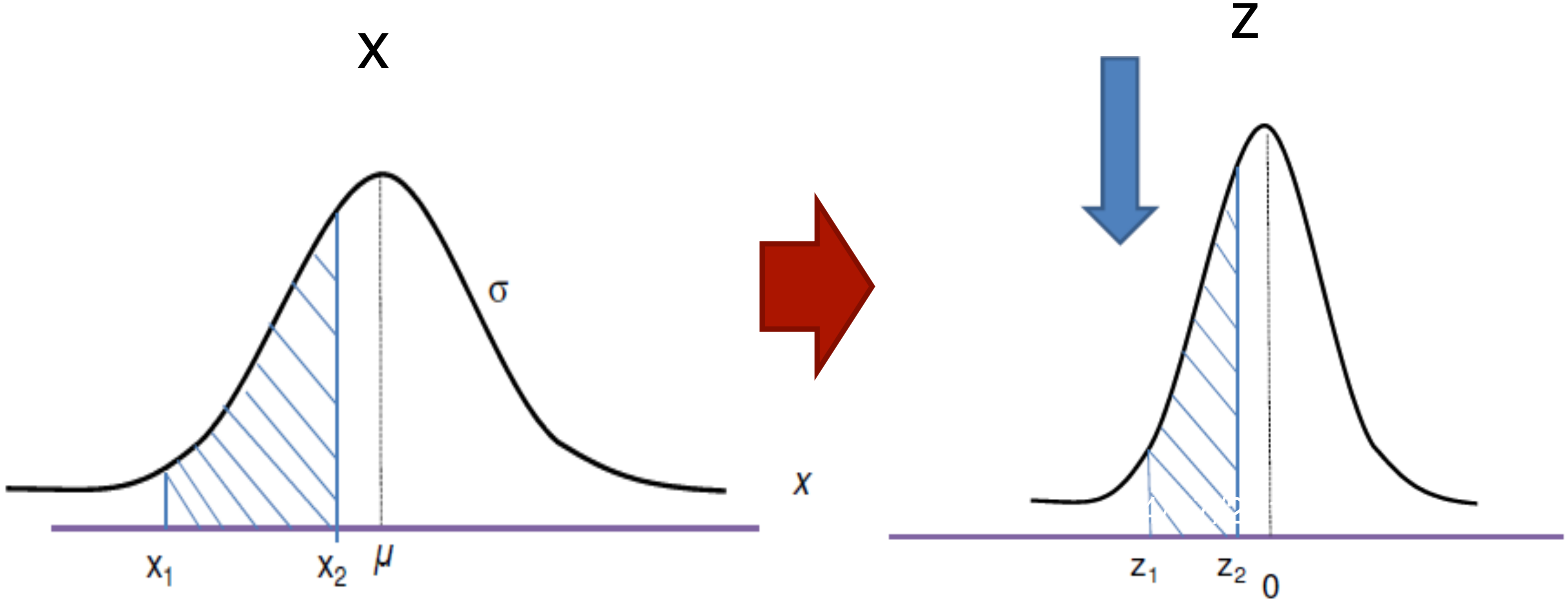
Luas kurva normal antara x = a & x = b
= probabilitas x terletak antara a dan b

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



3. DISTRIBUSI NORMAL

Transformasi dari Nilai X Ke Z



Di mana nilai Z:

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

Contoh

Diketahui tinggi badan karyawan di perusahaan A mengikuti distribusi Normal dengan rata-rata μ =160 cm dan standar deviasi σ = 6 cm

1. Berapa % karyawan perusahaan A yang tingginya antara 151 dan 172 cm?
2. Berapa % karyawan perusahaan A yang tingginya lebih dari 172 cm?

Solusi :

X = tinggi karyawan perusahaan A → X~N (μ =160 cm , σ = 6 cm)

1. **151 ≤ X ≤ 172** → $P(151 \leq x \leq 172) = P\left(\frac{151-160}{6} \leq \frac{x-160}{6} \leq \frac{172-160}{6}\right) = P(-1{,}5 \leq Z \leq 2)$

Cara 1 $= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 1{,}5) = 0{,}4772 + 0{,}4332 = 0{,}9104$

Cara 2 $= P(-\infty < Z \leq 2) - P(-\infty \leq Z \leq -1{,}5) = 0{,}9772 - 0{,}0668 = 0{,}9104$

2. **X > 172** → $P(x > 172) = P\left(\frac{x-160}{6} > \frac{172-160}{6}\right) = P(Z > 2)$

Cara 1 $= 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 2) = 0{,}5 - 0{,}4772 = 0{,}0228$

Cara 2 $= 1 - P(-\infty < Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

4. DISTRIBUSI EKSPONENSIAL

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x \text{ yang lain} \end{cases}$$

λ adalah parameter yang berupa bilangan riil dengan **λ** >0

$$\boxed{F(k) = P(0 \leq x \leq k) = \begin{cases} 0 & ; k < 0 \\ 1 - e^{-\lambda k} & ; k \geq 0 \end{cases}}$$

Dinamakan distribusi eksponensial dengan parameter:

$$\boxed{Rata - rata = E(x) = \frac{1}{\lambda}}$$

$$\boxed{Variance \rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}}$$

Contoh

Daya tahan lampu yang dihasilkan oleh suatu pabrik berdistribusi eksponensial dengan rata-rata 3000 jam.

a. Berapa probabilitas bahwa sebuah lampu yang diambil secara acak akan rusak/mati sebelum dipakai sampai 3000 jam

b. Berapa probabilitas bahwa sebuah lampu yang diambil secara acak akan mempunyai daya tahan lebih dari 3000 jam?

Solusi :

x = daya tahan lampu (dalam jam)

X ~ Eksponensial dengan rata-rata 3000 jam

→ $\lambda = \frac{1}{3000}$

$$a. P(x < 3000) = F(3000) = 1 - e^{-\left(\frac{1}{3000}\right)(3000)}$$

$$= 1 - e^{-1} = 1 - 0{,}368 = 0{,}632$$

$$b. P(x > 3000) = 1 - P(x \le 3000) = 1 - F(3000)$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{3000}\right)(3000)}\right) = e^{-1} = 0{,}368$$